

DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA

- metódy zobrazovania priestorových útvarov do roviny (premietania)
- metrické a polohové vzťahy priestorových útvarov riešené v rovine

Obsah predmetu DG

Zobrazovacie metódy:

- Mongeova projekcia
- Axonometria
- Stredové premietanie
 - Lineárna perspektíva

Polohové a metrické úlohy:

- Rezy základných telies
- Plochy
 - rotačné
 - priamkové
 - skrutkové

Vyučujúca:

RNDr. **Eva Stanová**, PhD.

ÚTEMS SvF, KAM, Vysokoškolská 4, č.d. 462

Podmienky úspešného ukončenia predmetu:

- zápočet 16 - 30 bodov: - písomná práca 20 bodov
- grafická práca 10 bodov
- skúška formou testu max 70 bodov

Potrebné získať spolu (z+s) **minimálne 51** bodov

Prednáška 1

Obsah

- **Rozšírený euklidovský priestor**
- **Ohniskové vlastnosti kuželosečiek**
 - Rozdelenie
 - Definícia
 - Bodová konštrukcia
 - Dotyčnica ku kuželosečke
 - Hyperoskulačné kružnice kuželosečky

ROZŠÍRENÝ EUKLIDOVSKÝ PRIESTOR

1. Euklidovský priestor E_3

Základné prvky : bod
priamka
rovina

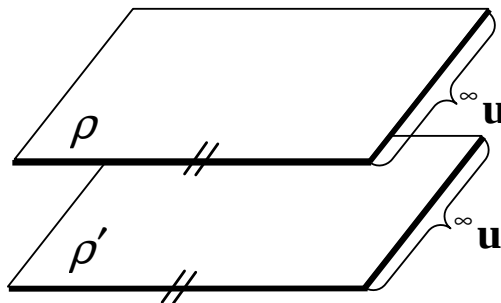
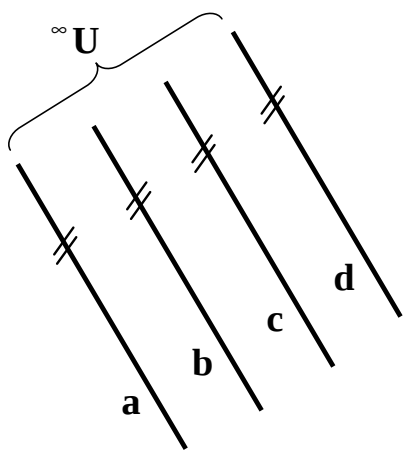
2. Rozšírený euklidovský priestor ${}^\infty E_3$

Základné prvky + nevlastné prvky

nevlastný bod

nevlastná priamka

nevlastná rovina



všetky nevlastné
body a nevlastné
priamky v priestore

OHNISKOVÉ VLASTNOSTI KUŽELOSEČIEK

Definícia

Kuželosečky sú rovinné krivky druhého stupňa, ktoré vznikajú rezom rotačného kužela nevrcholovou rovinou.

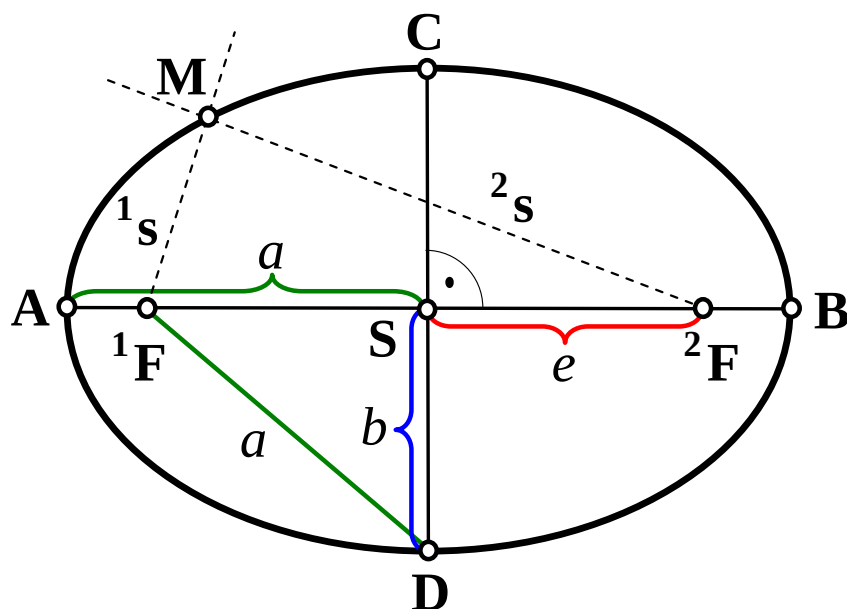
Druhy

- kružnica
- elipsa
- hyperbola
- parabola

Elipsa

Definícia

Elipsa je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od dvoch rôznych bodov $^1F, ^2F$ tejto roviny stály súčet vzdialeností $2a > |^1F^2F|$.



AB - hlavná os

CD - vedľajšia os

$^1s, ^2s$ - sprievodiče bodu M

$a = |\overline{AS}| = |\overline{BS}|$ - veľkosť hlavnej polosi

$b = |\overline{CS}| = |\overline{DS}|$ - veľkosť vedľajšej polosi

$e = |\overline{S^1F}| = |\overline{S^2F}|$ - excentricita
(ohnisková výstrednosť)

S - stred

A, B - hlavné vrcholy

C, D - vedľajšie vrcholy

$^1F, ^2F$ - ohniská

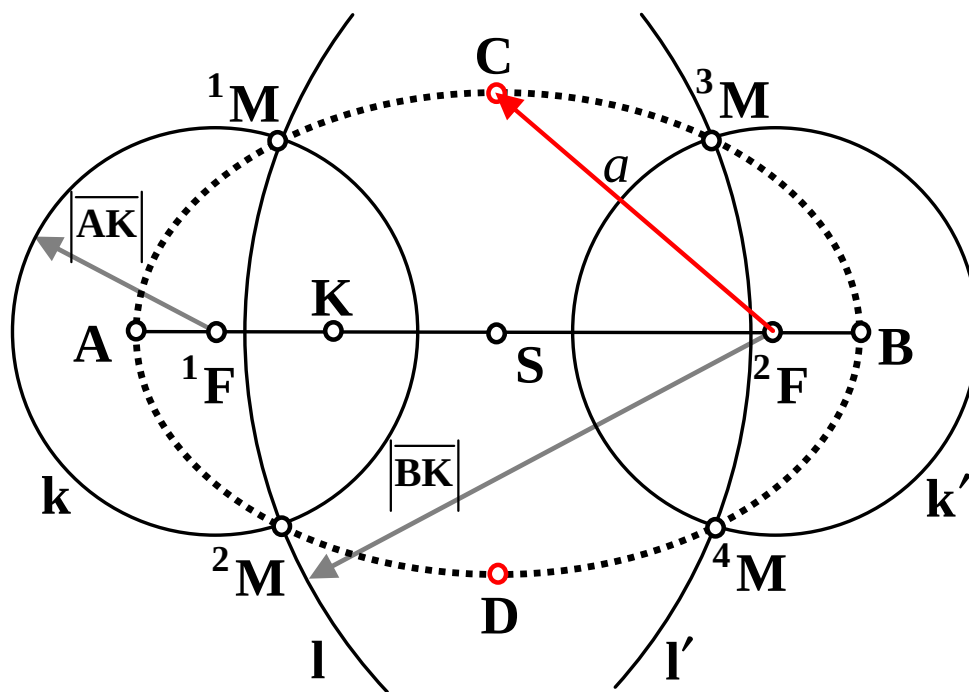
Platí: $e^2 = a^2 - b^2$

Bodová konštrukcia elipsy

Dané: **AB** ... hlavná os

e ... excentricita

Zostrojte: body elipsy



Postup

1. $^1F, ^2F$

2. K zvolíme

3. $k(^1F, r = |AK|)$

4. $l(^2F, r = |BK|)$

5. $\{^1M, ^2M\} = k \cap l$

6. $k'(^2F, r = |AK|)$

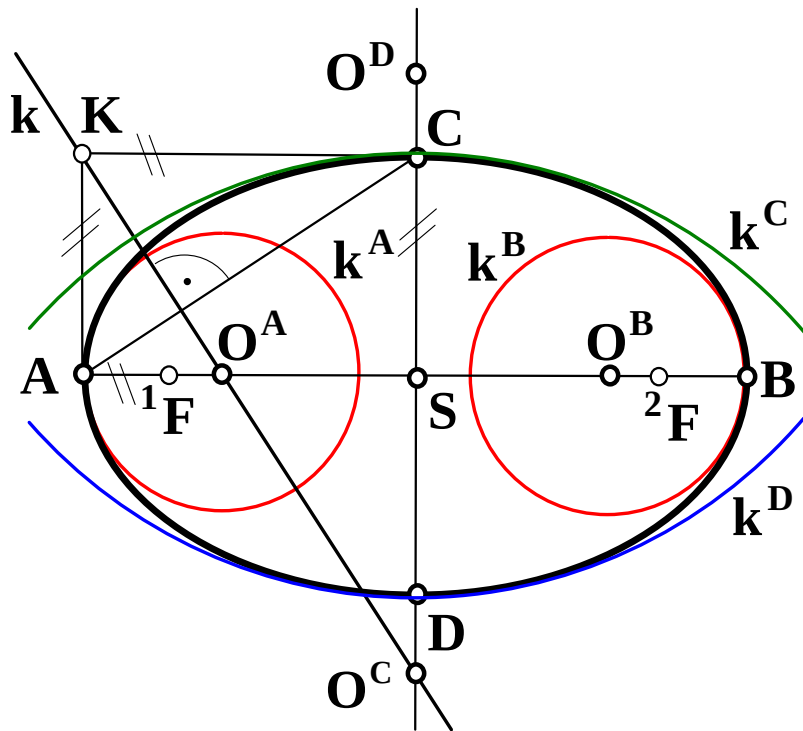
7. $l'(^1F, r = |BK|)$

8. $\{^3M, ^4M\} = k' \cap l'$

9. $C, D_-(K = S)$

Hyperoskulačné kružnice

- kružnice vo vrchoch elipsy, ktorých krivosť je rovná krivosti krivky v spoločnom bode



Postup

1. ASCK_obdlžnik
2. k_kolmica_na_AC
3. $O^A = k \cap AB$
4. $O^C = k \cap CD$
5. $k^A(O^A, r = |AO^A|)$
6. $k^B(O^B, r = |AO^A|)$
7. $k^C(O^C, r = |CO^C|)$
8. $k^D(O^D, r = |CO^C|)$

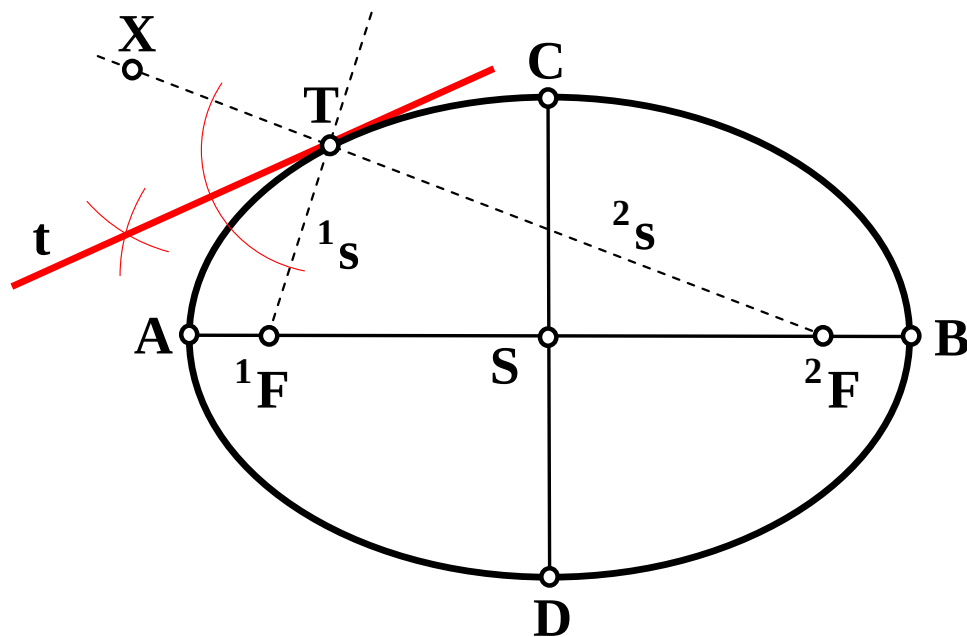
Dotyčná k elipse

a) v bode **T** elipsy

Platí:

Dotyčná v bode kuželosečky rozpolňuje vonkajší uhol sprievodičov dotykového bodu.

Úloha 1: V bode **T** elipsy zostrojte dotyčnicu **t**.



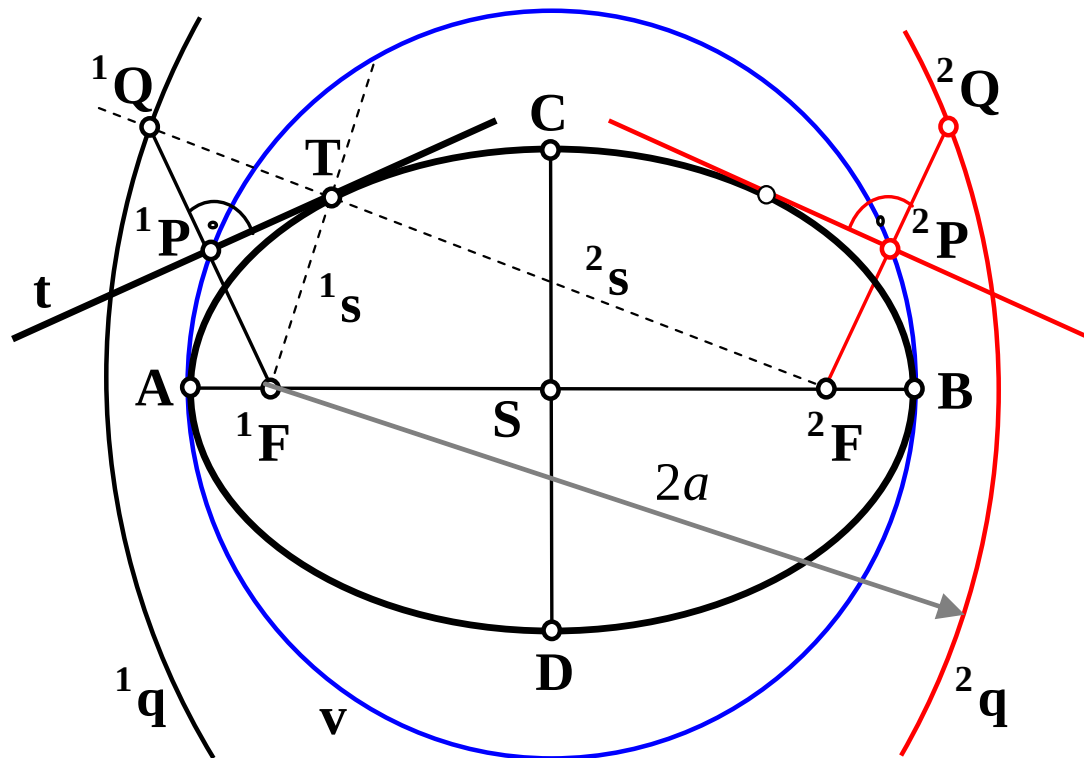
Postup

1. $^1s, ^2s$...sprievodiče bodu **T**
2. $t_{os_uhla_}\angle XT^1F$

Body Q, P

1Q ... symetrický s ohniskom 1F podľa dotýčnice t

1P ... päta kolmice z ohniska na dotýčnicu



$^1Q \dots ^1q(^2F, r = 2a)$
 $^2Q \dots ^2q(^1F, r = 2a)$ } určujúce kružnice

$P \dots v(S, r = a)$...vrcholová kružnica

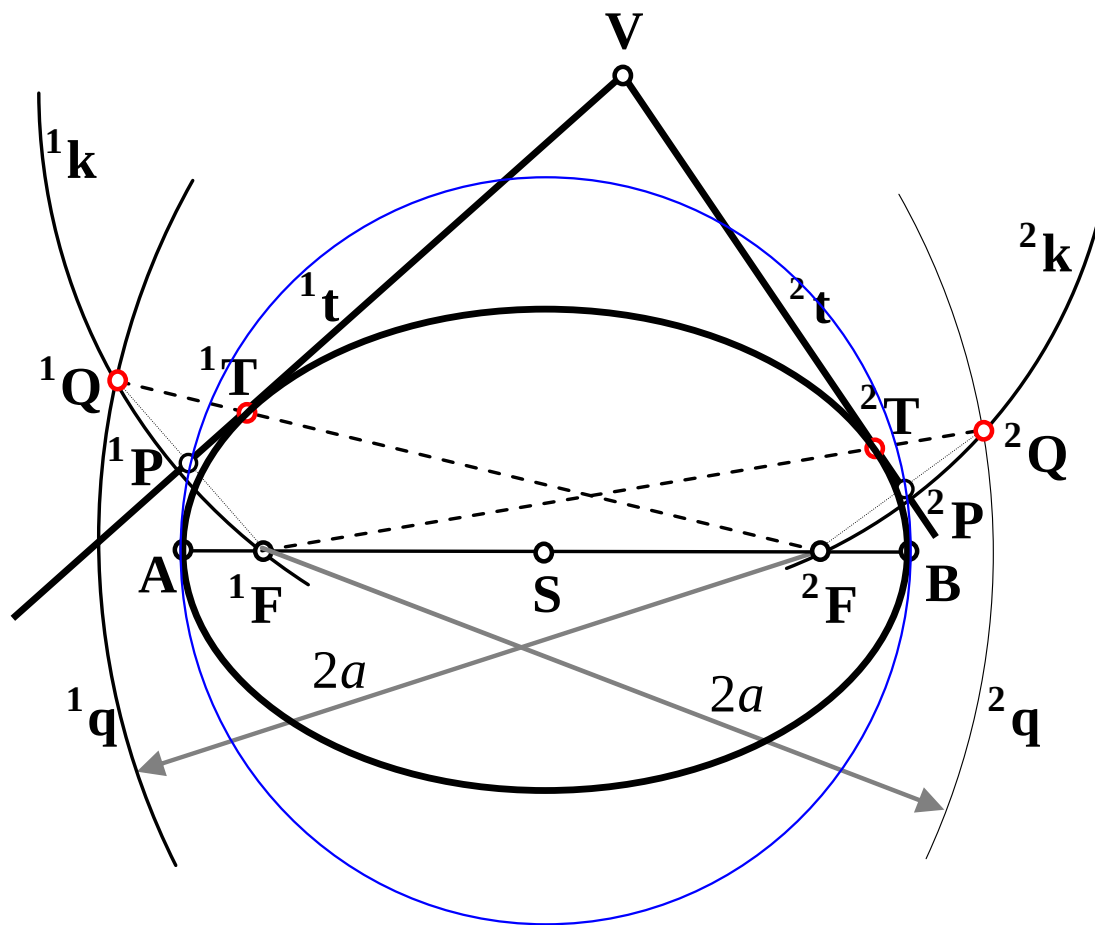
Platí:

□ Množina **bodov Q**, symetrických s jedným ohniskom (1F resp. 2F) elipsy podľa všetkých jej dotyčníc, je kružnica so stredom v druhom ohnisku (2F resp. 1F) a polomerom $2a$.

□ Množina piat **P** kolmíc, zostrojených z ohniska 1F (resp. 2F) na všetky dotyčnice elipsy, je kružnica so stredom v bode **S** a polomerom a .

b) Dotyčnica z vonkajšieho bodu V k elipse

Úloha 2: Elipsa je určená hlavnou osou **AB** a excentricitou e . Daný je vonkajší bod **V** elipsy. Zostrojte z bodu **V** dotyčnice $^1t, ^2t$ k elipse s dotykovými bodmi $^1T, ^2T$.



Postup

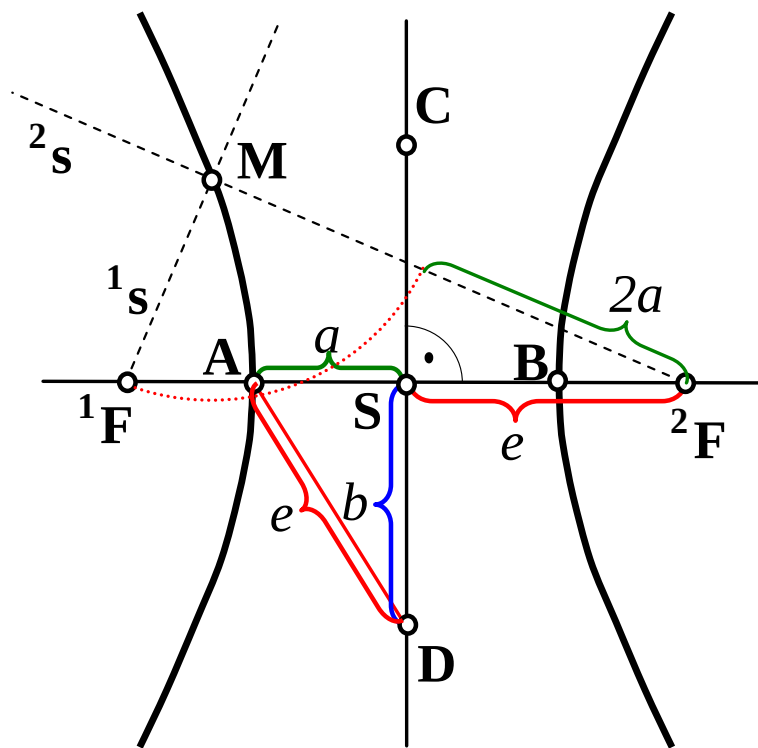
1. $^1F, ^2F$
2. $^1q(^2F, r = 2a), ^2q(^1F, r = 2a)$
3. $^1k(V, r = |V^1F|), ^2k(V, r = |V^2F|)$
4. $^1Q = ^1k \cap ^1q, ^2Q = ^2k \cap ^2q$
5. $v(S, r = a)$
6. $^1P = v \cap ^1Q^1F, ^2P = v \cap ^2Q^2F$
7. $^1t = V^1P, ^2t = V^2P$
8. $^1T = ^1t \cap ^1Q^2F, ^2T = ^2t \cap ^2Q^1F$

Hyperbola

Definícia

Hyperbola je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od dvoch rôznych bodov $^1F, ^2F$ tejto roviny konštantný rozdiel vzdialeností

$$2a < |^1F^2F|.$$



Platí: $e^2 = a^2 + b^2$

S - stred

A, B - hlavné (reálne) vrcholy

C, D - vedľajšie (imaginárne) vrcholy

$^1F, ^2F$ - ohniská

AB - hlavná (reálna) os

CD - vedľajšia (imaginárna) os

$^1s, ^2s$ - sprievodiče bodu M

$a = |AS| = |BS|$ - veľkosť hlavnej polosi

$b = |CS| = |DS|$ - veľkosť vedľajšej polosi

$e = |S^1F| = |S^2F|$ - excentricita

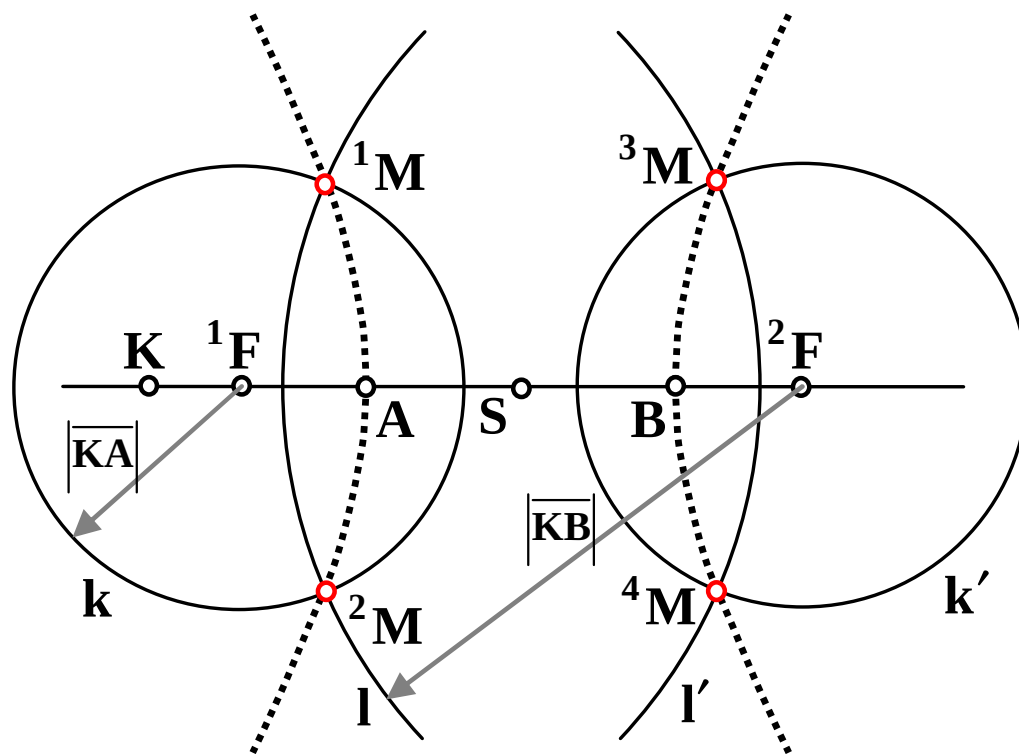
(ohnisková výstrednosť)

Bodová konštrukcia hyperboly

Dané: **AB** ... hlavná os

e ... excentricita

Zostrojte: body hyperboly

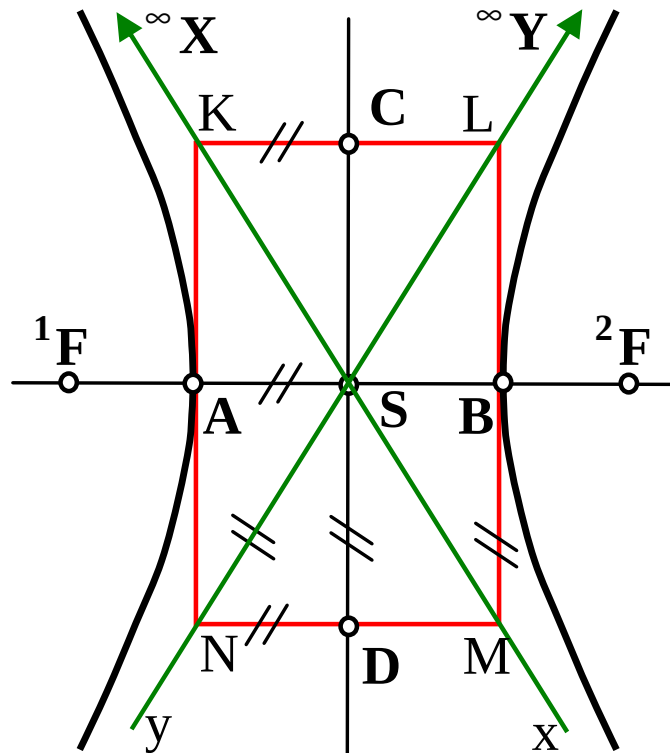


Postup

1. $^1F, ^2F$
2. K zvolíme
3. $k(^1F, r = |AK|)$
4. $l(^2F, r = |BK|)$
5. $\{^1M, ^2M\} = k \cap l$
6. $k'(^2F, r = |AK|)$
7. $l'(^1F, r = |BK|)$
8. $\{^3M, ^4M\} = k' \cap l'$

Asymptoty

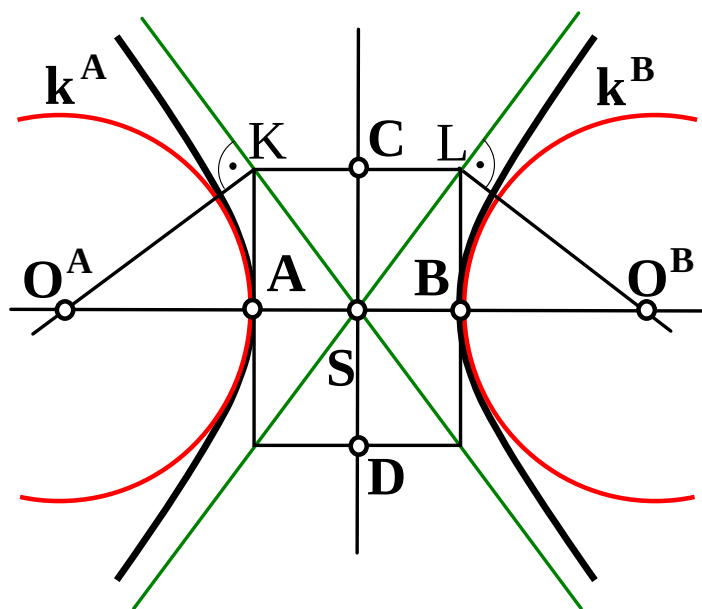
- dotyčnice v nevlastných bodech hyperboly



Postup

1. obdĺžnik $KLMN$ - asymptotický
2. uhlopriečky x, y - asymptoty

Hyperoskulačné kružnice



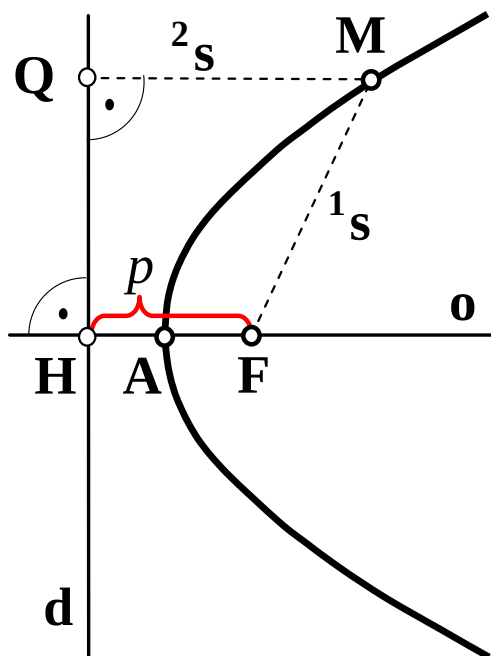
Postup

1. asymptotický obdĺžnik
2. asymptoty
3. z K kolmica na asymptotu $\rightarrow O^A$
4. z L kolmica na asymptotu $\rightarrow O^B$
5. $k^A(O^A, r = |AO^A|)$
6. $k^B(O^B, r = |BO^B|)$

Parabola

Definícia

Parabola je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od danej priamky **d** a daného bodu $F \notin d$ tejto roviny.



d - určujúca (riadiaca) priamka

o - os

A - vrchol

F - ohnisko

p - parameter

$^1s, ^2s$ - sprievodiče bodu **M**

Platí: $\mathbf{MQ} \perp \mathbf{d}$

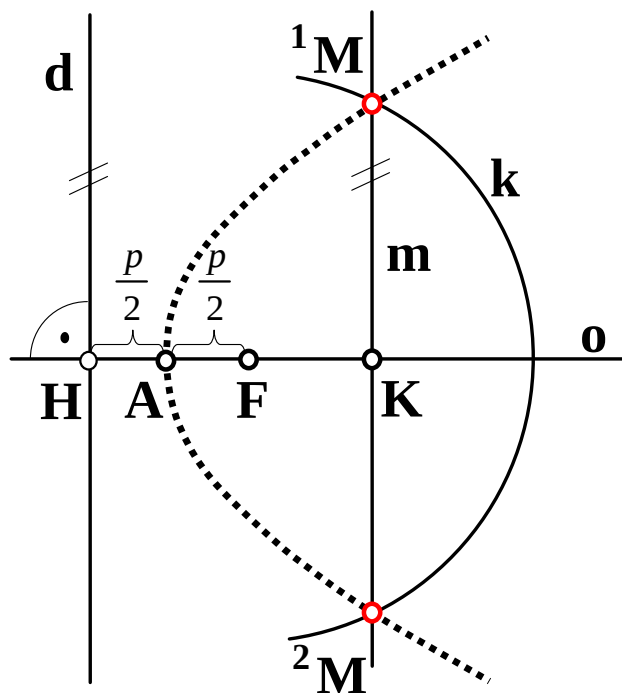
$$|\mathbf{MQ}| = |\mathbf{MF}|$$

Bodová konštrukcia paraboly

Dané: **d** ... určujúca priamka

F ... ohnisko

Zostrojte: body paraboly

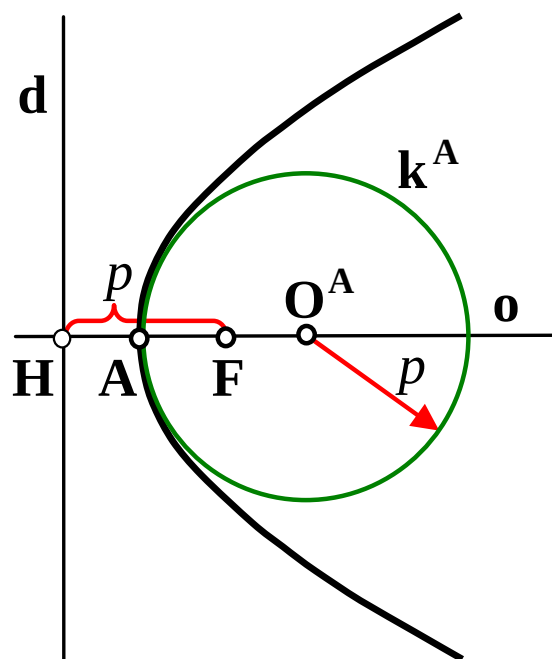


Postup

1. os **o** bodom **F** kolmo na **d**
2. **A** ... stred úsečky **HF**
3. **K** ... zvolíme
4. **m** $\parallel$ **d** bodom **K**
5. $k(F, r = |HK|)$
6. $\{^1M, ^2M\} = k \cap m$

Hyperoskulačná kružnica

Platí: Polomer hyperoskulačnej kružnice sa rovná parametru paraboly.



$$\mathbf{k}^A(\mathbf{O}^A, r = p)$$